

ŘEŠENÍ ÚLOH, CVIČENÍ 7

1. (a) Nic.
 (b) Epimorfismus.
 (c) Monomorfismus.
 (d) Isomorfismus.
2. (a) Nic. Zobrazení není epimorfismus, neboť, například vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ neleží v $im(A)$. Tedy, jelikož zobrazení jde z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, není ani monomorfismus.
 (b) Isomorfismus. Reprezentující matice je například $[A]_{E_2 \rightarrow E_2} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, a její sloupce tvoří bázi $\mathbb{R}^2$.
 (c) Nic. Reprezentující matice je například $[A]_{E_2 \rightarrow E_2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, a její sloupce jsou lineárně závislé. Tedy, zobrazení není monomorfismus, a jelikož zobrazení jde z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, není ani epimorfismus.
 (d) Nic. Reprezentující matice je například $[A]_{E_3 \rightarrow E_3} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, a její sloupce jsou lineárně závislé. Tedy, zobrazení není monomorfismus, a jelikož zobrazení jde z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$, není ani epimorfismus.
 (e) Nic. Zobrazení není monomorfismus, neboť například nenulová matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ leží v jeho jádru. Tedy, jelikož zobrazení jde z $Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ do $Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, není ani monomorfismus.
 (f) Nic. Zobrazení není epimorfismus, neboť například polynom x neleží v jeho obrazu. Tedy, jelikož zobrazení jde z $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ do $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, není ani monomorfismus.
 (g) Isomorfismus. Reprezentující matice vůči upořádané bázi $X = (1, x, x^2)$ je

$$[A]_{X \rightarrow X} = ([A(1)]_X, [A(x)]_X, [A(x^2)]_X) = ([x^2]_X, [-x^2 + 6]_X, [5x + 1]_X) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

a její sloupce tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

- (h) Monomorfismus. Pokud totiž polynom $p = ax^2 + bx + c$ leží v jádru A , potom platí $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Porovnáním jednotlivých složek matice dostaneme, že $a = 0, b = 0$, a a tedy také $c = 0$, tedy p je nulový polynom. Tedy $ker(A) = \vec{0}$, což znamená, že A je monomorfismus. Zobrazení nemůže být epimorfismus, jelikož $dim(Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)) = 4 > 3 = dim(\mathbb{R}^{\leq 2}[x])$.
 (i) Nic. Zobrazení nemůže být monomorfismus, neboť $dim(\mathbb{R}^{\leq 5}[x]) = 6 > 3 = dim(\mathbb{R}^3)$. Zobrazení není ani epimorfismus, neboť například vektor $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ neleží v $im(A)$.
3. (a) Isomorfismus je například zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, $A\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = ax^2 + bx + c$.
 (b) Isomorfismus je například zobrazení $A : Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^6$, $A\left(\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$.

- (b) Isomorfismus je například zobrazení $A : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $A(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
4. (a) Implikace platí, důkaz můžeme provést například sporem. Předpokládejme, že $B \circ A$ je monomorfismus, ale A není monomorfismus. Tedy, $\ker(A) \neq \vec{0}$, odkud plyne, že existuje nenulový vektor $\vec{x} \in L_1$ takový, že $A(\vec{x}) = \vec{0}$. Potom ale platí

$$(B \circ A)(\vec{x}) = B(A(\vec{x})) = B(\vec{0}) = \vec{0},$$

tedy, $\vec{x} \in \ker(B \circ A)$. Odtud plyne, že $\ker(B \circ A) \neq \vec{0}$, což je spor s tím, že $B \circ A$ je monomorfismus.

- (b) Implikace neplatí. Například, nechť $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je identické zobrazení, a $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x . Potom A je monomorfismus (dokonce isomorfismus), ale $B \circ A = B$ není, neboť například nenulový vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se zobrazením B zobrazí na nulový vektor.
5. Nejprve dokážeme, že $\ker(M \cdot A) = \ker(A)$.

Pokud $\vec{x} \in \ker(A)$, potom $A(\vec{x}) = \vec{0}$, tedy také $(M \cdot A)(\vec{x}) = M(A(\vec{x})) = M(\vec{0}) = \vec{0}$, tedy $\vec{x} \in \ker(M \cdot A)$. Tedy platí inkluze $\ker(A) \subseteq \ker(M \cdot A)$.

Pokud $\vec{x} \in \ker(M \cdot A)$, potom $(M \cdot A)(\vec{x}) = \vec{0}$. Přenásobíme tuto rovnost zleva maticí M^{-1} , a dostaneme

$$\vec{0} = M^{-1}(\vec{0}) = M^{-1} \cdot (M \cdot A)(\vec{x}) = (M^{-1} \cdot M) \cdot A(\vec{x}) = A(\vec{x}).$$

Tedy $\vec{x} \in \ker(A)$, čímž je dokázána i inkluze $\ker(M \cdot A) \subseteq \ker(A)$.

Tedy $\ker(M \cdot A) = \ker(A)$, odkud plyne $\text{def}(M \cdot A) = \text{def}(A)$. Nyní, dle věty o dimenzi jádra a obrazu platí $\text{rank}(A) = s - \text{def}(A) = s - \text{def}(M \cdot A) = \text{rank}(M \cdot A)$, čímž je důkaz dokončen.

6. Výrok neplatí. Například, nechť $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice rotace v $\mathbb{R}^2$ o 90 stupňů, a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je matice projekce na osu x . Potom M je regulární, a $M \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dále, platí

$$\text{im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

zatímco

$$\text{im}(M \cdot A) = \left\{ M \cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$